Вариант К

I

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ y'(\frac{1}{2}) = 0, y(\frac{1}{4}) = 0. \end{cases}$$

Решение имеет вид [1]:

$$y = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \lambda < 0;$$

$$y = ax + b, \lambda = 0;$$

$$y = a\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), \lambda > 0.$$

В силу начальных условий в решениях, отвечающих $\lambda \leqslant 0$, коэффициенты $a = b = 0$; а при $\lambda > 0$:

$$y\left(\tfrac{1}{4}\right) = a\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) = 0 \Rightarrow a = -b\tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) \vee \begin{cases} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) = 0 \\ b = 0 \end{cases},$$

$$y'\left(\tfrac{5\pi}{2}\right) = -a\sqrt{\lambda}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + b\sqrt{\lambda}\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Получаются условия на λ и b:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} = 2\pi + 4\pi n, \\ b = 0. \end{cases}$$

Таким образом:

$$y = const\cos\left(\left(2\pi + 4\pi n\right)x\right).$$

II

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0,$$

$D = 0$ — уравнение параболического типа. Таким образом, замена переменных будет определяться решением характеристического уравнения и некоторой, независимой от этого решения функцией 'старых' переменных [2]:

$$y_x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \xi = y + x \\ \eta = x \end{cases}.$$

Тогда:

$$u_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_y = u_\xi,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

Подставляя исходное уравнение получаем каноническую форму:

$$u_{\eta\eta} + 4u_\eta = 0.$$

Решаем методом разделения перемнных:

$$\frac{du_\eta}{u_\eta} = -4d\eta;$$

$$u_\eta = f(\xi)e^{-4\eta};$$

$$u = f(\xi)e^{-4\eta} + g(\xi);$$

$$u = f(y+x)e^{-4x} + g(y+x).$$

Где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции.

III

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 4, t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4 - x, 2 < x \leqslant 4, \end{cases} \\ u(0,t) = 0, u(4,t) = 0. \end{cases}$$

Решение смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке с однородными граничными и неоднородными начальными условиями имеет вид [3]:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l u(y,0)\sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right)dy.$$

где l — длина отрезка, a — коэффициент перед 2-й производной по координате в исходном урав-

нении.

$$A_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{y^2}{2}\sin\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)dy + \frac{1}{2}\int\limits_2^4 (4-y)\sin\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)dy =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}y^2\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^2 y\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)dy - \frac{8}{\pi n}\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_2^4 +$$

$$+ \frac{2}{\pi n}y\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_2^4 - \frac{2}{\pi n}\int\limits_2^4 \cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)dy = -\frac{4}{\pi n}\cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) + \frac{8}{(\pi n)^2}y\sin\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_0^2 +$$

$$+ \frac{32}{(\pi n)^3}\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_0^2 - \frac{8}{\pi n}\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_2^4 + \frac{2}{\pi n}y\cos\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_2^4 - \frac{8}{(\pi n)^2}\sin\Big(\frac{\pi n y}{4}\Big)\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{8}{(\pi n)^2}\sin\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) + \frac{32}{(\pi n)^3}\cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) - \frac{32}{(\pi n)^3}.$$

Тогда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{(\pi n)^2}\sin\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) + \frac{32}{(\pi n)^3}\cos\Big(\frac{\pi n}{2}\Big) - \frac{32}{(\pi n)^3}\right]\exp\left\{-\Big(\frac{\pi n}{2}\Big)^2 t\right\}\sin\Big(\frac{\pi n x}{4}\Big).$$

Список литературы

[1] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. //ФИЗМАТЛИТ. 1950. — 470с.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. //Москва. Издательство Московского университета. 1999. — 799с.

[3] Багров В.Г., Белов В. В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. ч.2, т.2 //Томск. Издательство НТЛ. 2002. — 646с.